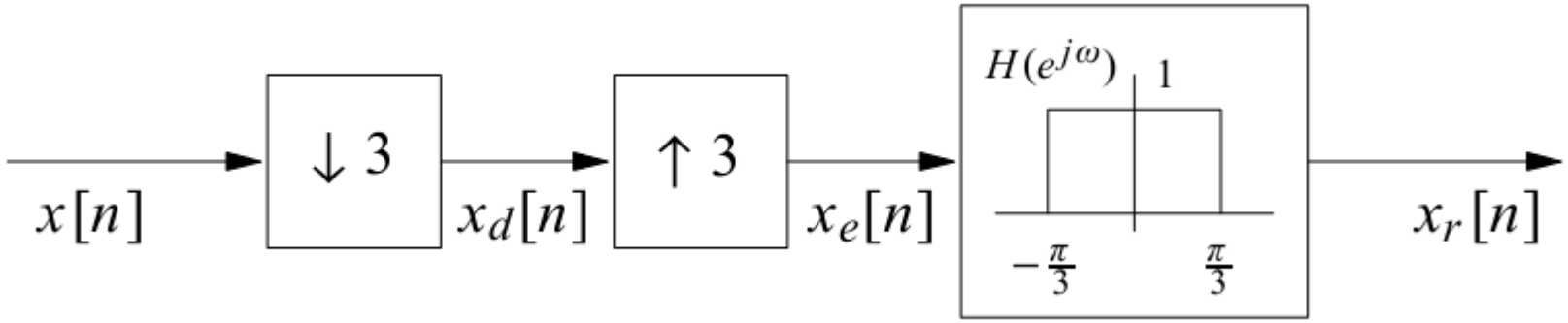
Signals & Systems

By: M. Shahraki



University of Sistan and Baluchestan

University of Sistan & Baluchestan
Faculty of Electrical and Computer Engineering
Department of Electrical & Electronics Engineering

Discrete Fourier Transform

تبدیل فوریه گسسته

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=k\omega_0}$$

تبدیل فوریه گسسته، متناوب با دوره تناوب 2π است.

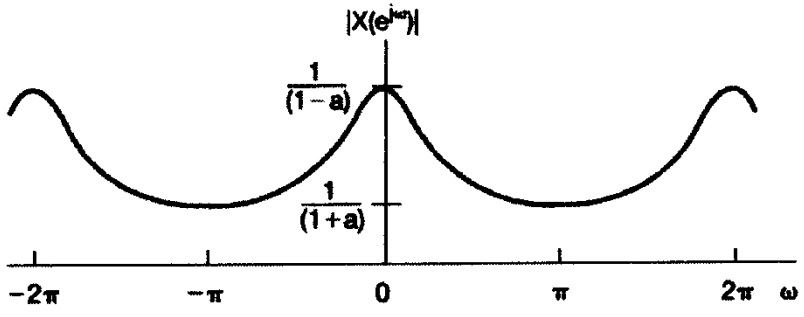
Discrete Fourier Transform

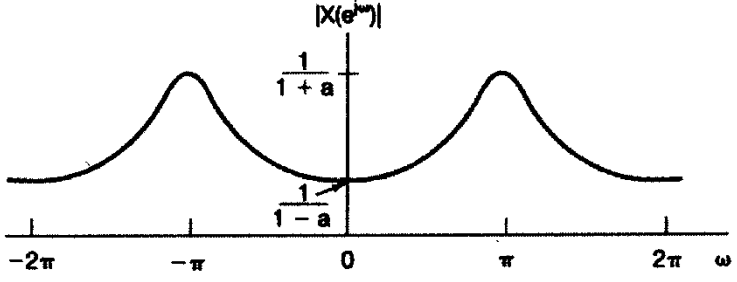
$$x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1$$

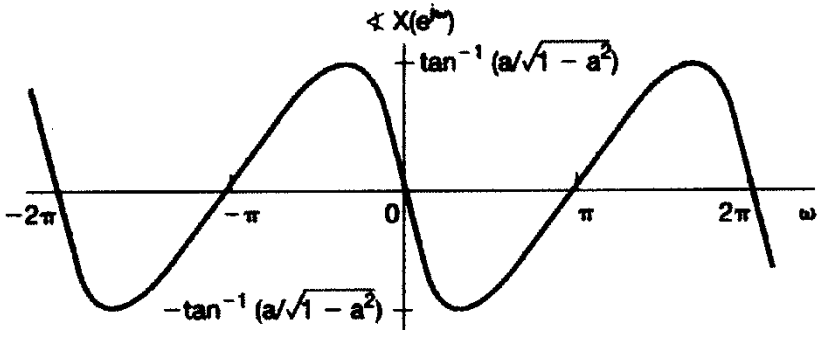
تبدیل فوریه گسسته

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

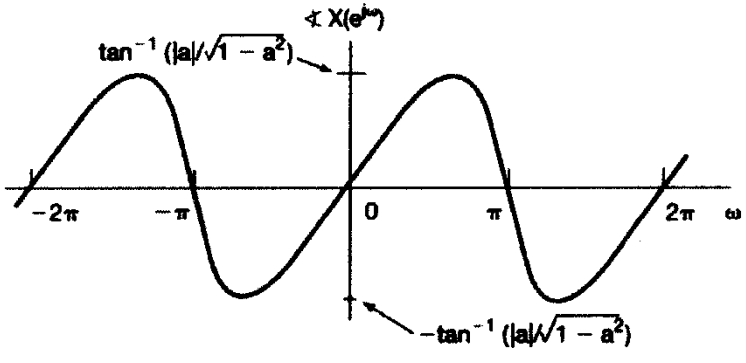
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \quad |a| < 1$$







$0 < a < 1$



$-1 < a < 0$

Discrete Fourier Transform

تبدیل فوریه گسسته

$$x[n]=a^{|n|}, \quad |a|<1$$

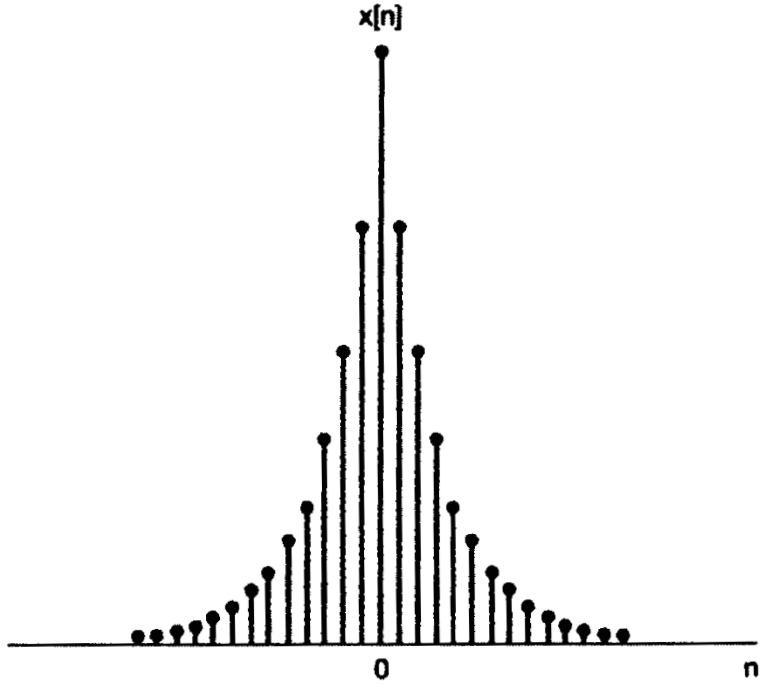
$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}e^{-j\omega n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(a^{-1}e^{-j\omega})^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-j\omega})^{n}$$

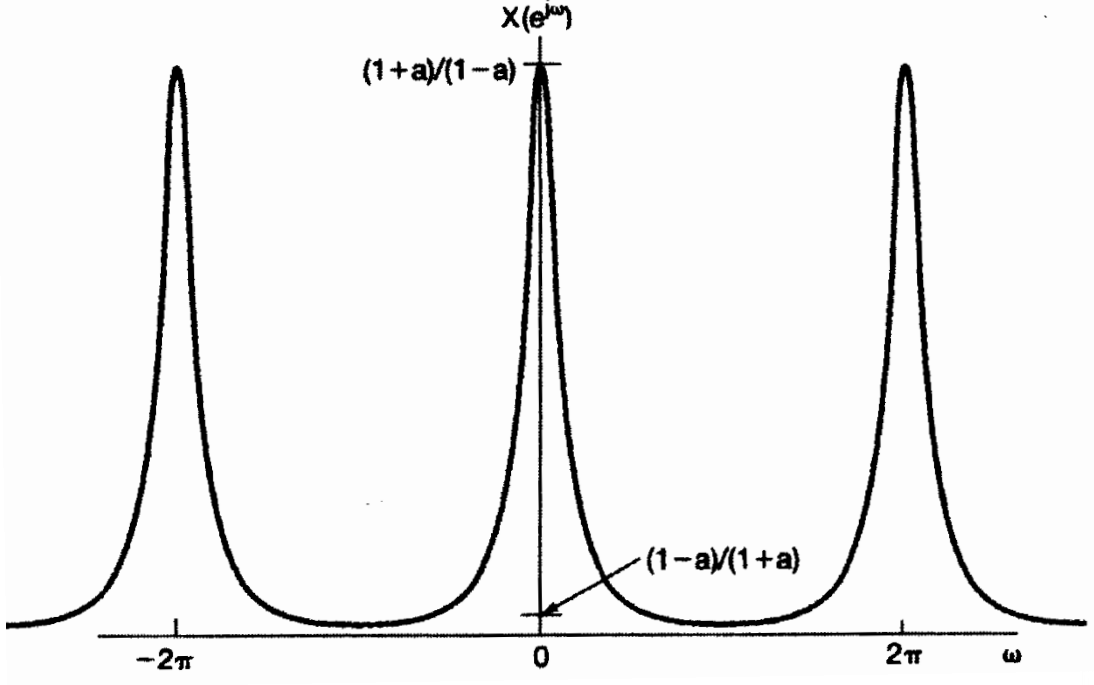
$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}(ae^{j\omega})^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-j\omega})^{n}=\sum_{m=\infty}^{1}(ae^{j\omega})^{m}+\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-j\omega})^{n}=\frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}+\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega})=\frac{1-a^{2}}{1-2a\cos\omega+a^{2}}, \quad |a|<1$$

Discrete Fourier Transform

$$x[n]=a^{|n|},\quad |a|<1 \qquad X(e^{j\omega})=\frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega+a^2},\ |a|<1$$ تبدیل فوریه گسسته





$$0<a<1$$

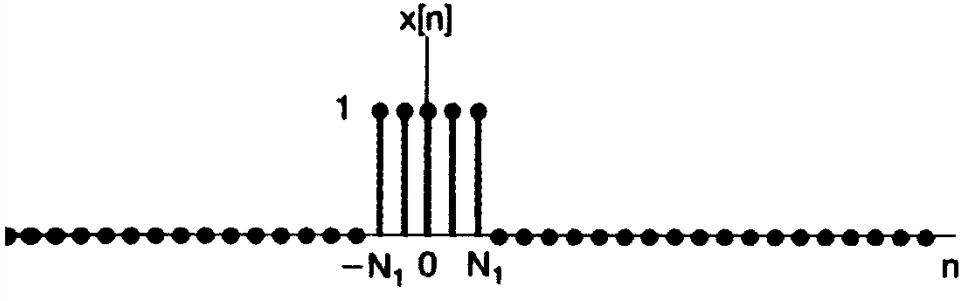
Discrete Fourier Transform

$$x[n]=\begin{cases}1 & |n|\le N_1\\ 0 & |n|>N_1\end{cases}$$

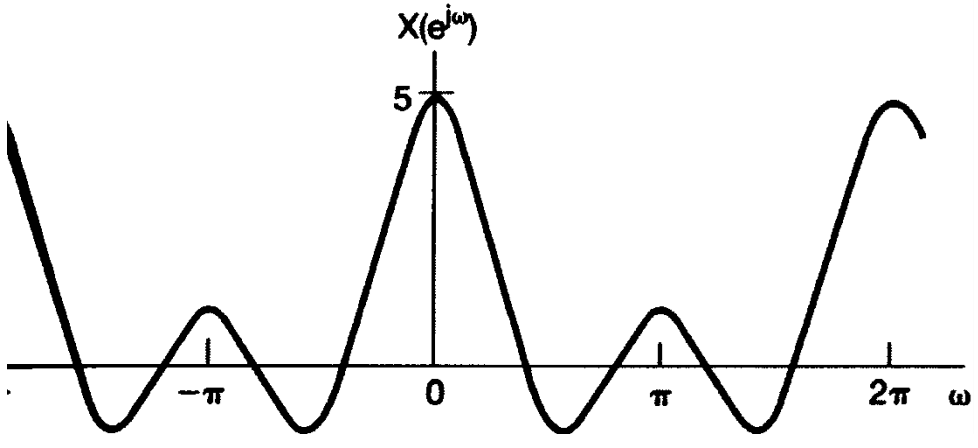
تبدیل فوریه گسسته

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-N_1}^{N_1}e^{-j\omega n}$$

$$X(e^{j\omega})=\frac{\sin\omega(N_1+\frac{1}{2})}{\sin\omega/2}$$



$$N_1=2$$



Discrete Fourier Transform

تبدیل فوریه گسسته

$$x[n]=\delta[n]$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]e^{-j\omega n}$$

$$X(e^{j\omega})=1$$

$$x[n]=\delta[n-n_0]$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n-n_0]e^{-j\omega n}$$

$$X(e^{j\omega})=e^{-j\omega n_0}$$

Discrete Fourier Transform

همزادی (۱) در تبدیل فوریه گسسته <u>وجود ندارد.</u>

$$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$X[-n] \xrightarrow{F} ?$$

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| < N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases}$$

$$g[n] = \frac{2\sin n(W_1 + \frac{1}{2})}{\sin(n/2)}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\sin \omega(N_1 + \frac{1}{2})}{\sin(\omega/2)}$$

$$G(j\omega) = ?$$

Discrete Fourier Transform

تبدیل فوریه گسسته سیگنالهای متناوب

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \qquad X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \qquad X(e^{j\omega}) = \sum_{k=<N>} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N}), \qquad 0 < \omega < 2\pi$$

a_k متناوب با دوره تناوب 2π است

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$$

Discrete Fourier Transform

تبدیل فوریه گسسته سیگنالهای متناوب

$$x[n]=\cos\omega_0 n \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{5} \qquad N=5$$

$$x[n]=\sum_{k=<N>}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}t} \qquad x[n]=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{5}t}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{5}t}$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

$$a_1=\frac{1}{2} \qquad a_{-1}=\frac{1}{2}$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\left[\frac{1}{2}\delta(\omega+\frac{2\pi}{5}-2\pi l)+\frac{1}{2}\delta(\omega-\frac{2\pi}{5}-2\pi l)\right]$$

$$a_{1+lN}=\frac{1}{2} \qquad a_{-1+lN}=\frac{1}{2}$$

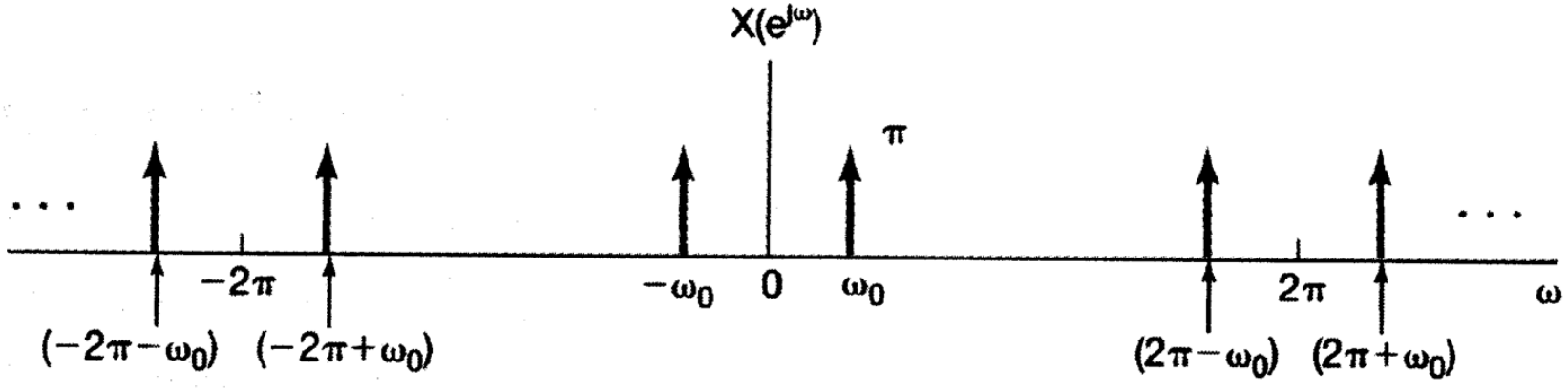
$$X(e^{j\omega})=\pi\left[\delta(\omega+\frac{2\pi}{5})+\delta(\omega-\frac{2\pi}{5})\right] \qquad -\pi\le\omega<\pi$$

Discrete Fourier Transform

$$x[n] = \cos \omega_0 n \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{5} \qquad N = 5$$

تبدیل فوریه گسسته سیگنالهای متناوب

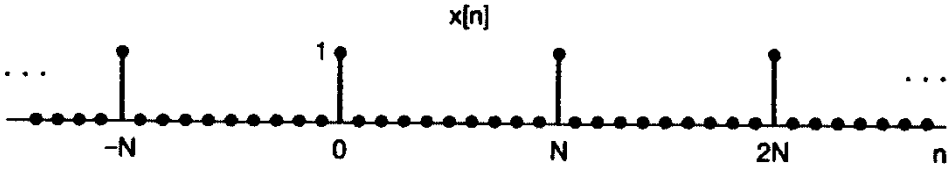
$$X(e^{j\omega}) = \pi\left[\delta(\omega + \frac{2\pi}{5}) + \frac{1}{2}\delta(\omega - \frac{2\pi}{5})\right] \qquad -\pi \le \omega < \pi$$



Discrete Fourier Transform

تبدیل فوریه گسسته سیگنالهای متناوب

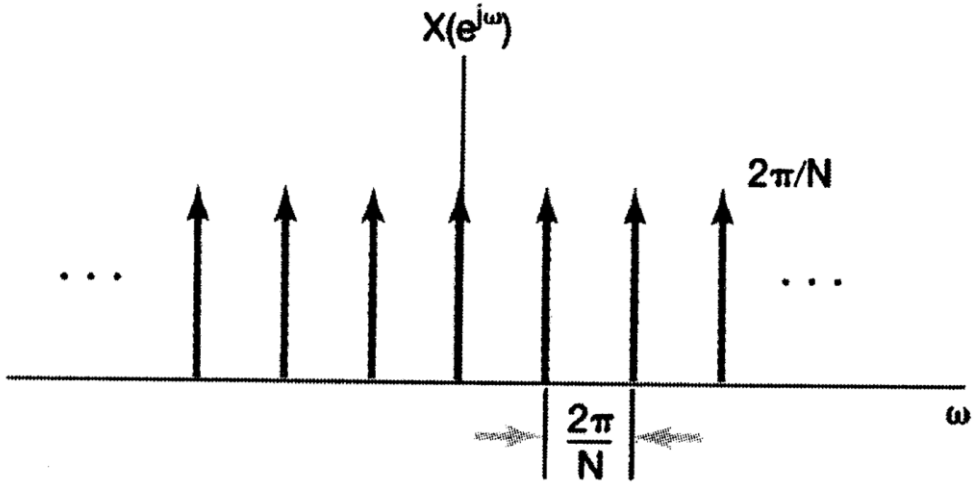
$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN] \qquad x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}t}$$



$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{N}$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

$$X(e^{j\omega})=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$



Discrete Fourier Transform

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۱- خاصیت متناوب بودن با دوره تناوب 2π

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۲- خاصیت خطی بودن

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$y[n] \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega})$$

$$z[n] = Ax[n] + By[n] \xleftrightarrow{F} Z(e^{j\omega}) = AX(e^{j\omega}) + BY(e^{j\omega})$$

Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۳- جابجایی زمانی

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

Discrete Fourier Transform

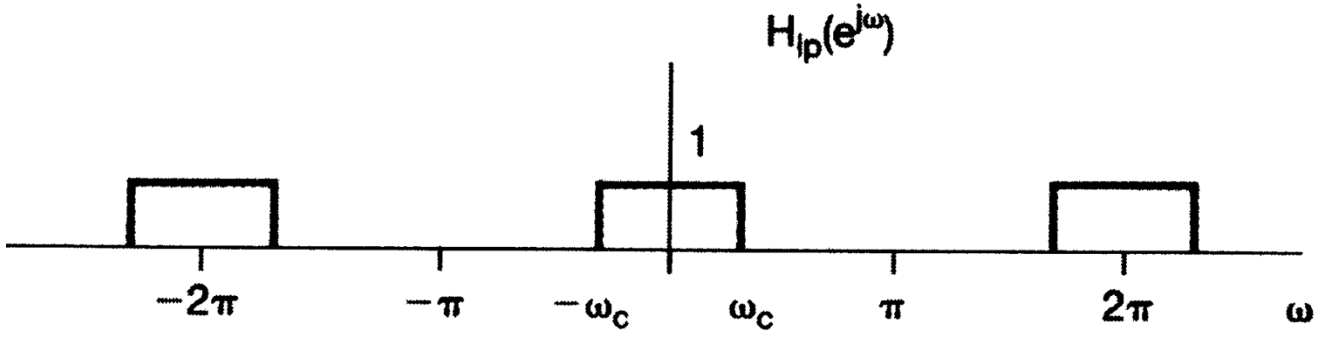
خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

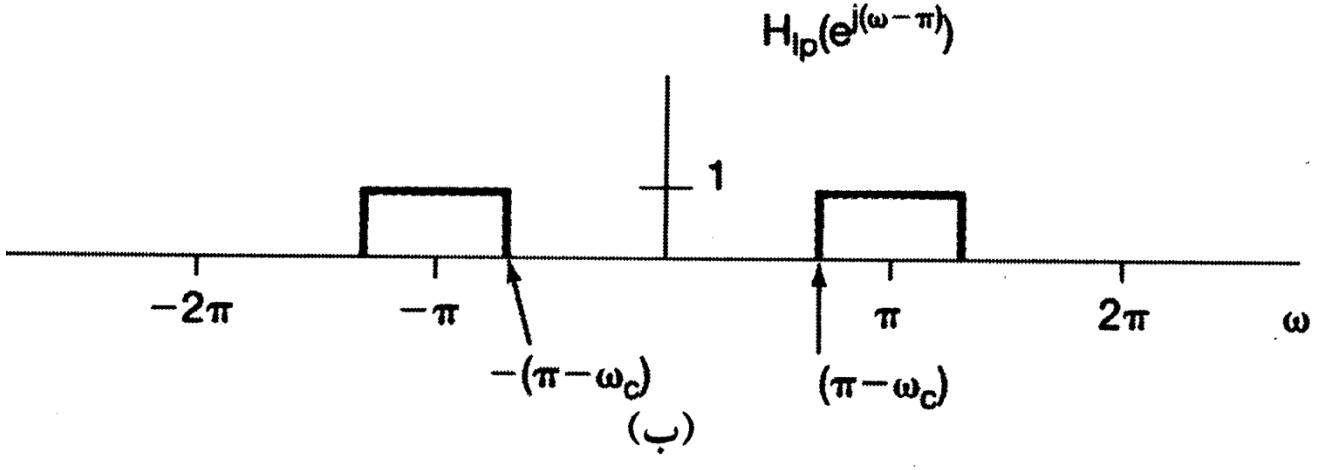
۴- جابجایی فرکانسی

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

Discrete Fourier Transform





(ب)

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۴- جابجایی فرکانسی

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$$

$$h_{hp}[n] = e^{j\pi n} h_{lp} = (-1)^n h_{lp}$$

Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۵- مزدوج و تقارن مزدوج

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$x^*[n] \xleftrightarrow{F} X^*(e^{-j\omega})$$

$x[n]$ حقیقی

$$x[n] = x^*[n]$$

$$X^*(e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})$$

$x[n]$ حقیقی

$$\mathrm{Re}\{X^*(e^{j\omega})\} = \mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$$

$$\mathrm{Im}\{X^*(e^{j\omega})\} = -\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$$

$x[n]$ حقیقی و زوج

تبدیل فوریه حقیقی و زوج

$$X(e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})$$

$x[n]$ حقیقی و فرد

تبدیل فوریه موهومی و فرد

$$X(e^{-j\omega}) = -X(e^{j\omega})$$

Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۵- مزدوج و تقارن مزدوج

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$x^*[n] \xleftrightarrow{F} X^*(e^{-j\omega})$$

$x[n]$ حقیقی

$$\mathrm{Re}\{X^*(e^{j\omega})\} = \mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$$

$$\mathrm{Im}\{X^*(e^{j\omega})\} = -\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$$

$$x[n] = Ev(x[n]) + Od(x[n])$$

$$Ev(x[n]) \xleftrightarrow{F} \mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$$

$$Od(x[n]) \xleftrightarrow{F} \mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$$

Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۶- تفاضل گیری

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$$x[n]-x[n-1] \xleftrightarrow{F} (1-e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$$

Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۷- جمع انباره ای

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(1-e^{-j\omega})} X(j\omega) + \pi X(e^{j0}) \sum_{l=-\infty}^{n} \delta[\omega - 2\pi l]$$

$$\delta[n] \xleftrightarrow{F} 1$$

$$y[n] = u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(1-e^{-j\omega})} + \pi\delta[\omega]$$

Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

$$g[n]=\delta[n] \qquad G(e^{j\omega})=1$$

۷- جمع انباره ای

$$x[n]=u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]=\sum_{m=-\infty}^{n}g[m]$$

$$X(j\omega)=\frac{1}{(1-e^{-j\omega})}G(j\omega)+\pi X(e^{j0})\sum_{l=-\infty}^{n}\delta[\omega-2\pi l]$$

$$X(j\omega)=\frac{1}{(1-e^{-j\omega})}+\pi\sum_{l=-\infty}^{n}\delta[\omega-2\pi l]$$

Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۸- وارونگی زمانی

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$x[-n] \xleftrightarrow{F} X(e^{-j\omega})$$

Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۹- انبساط زمانی

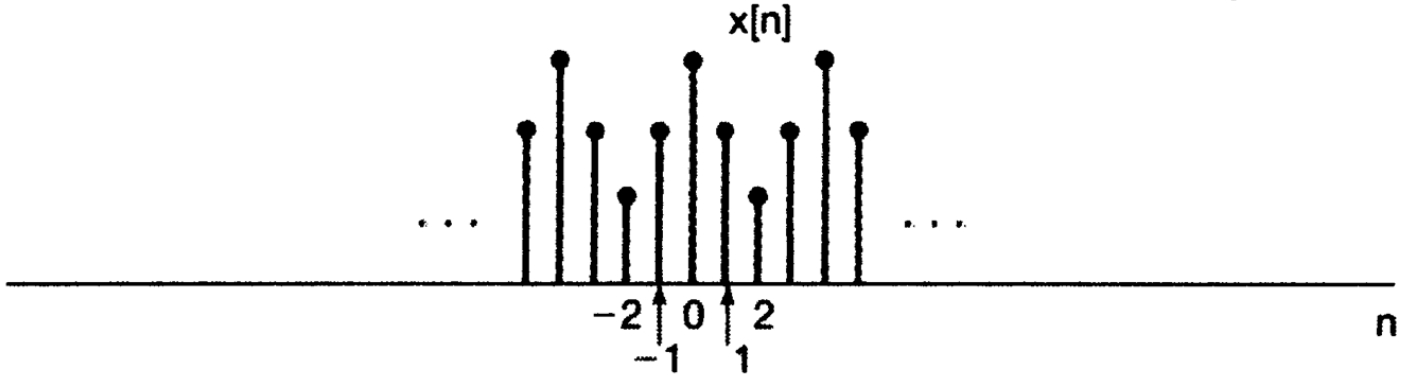
$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

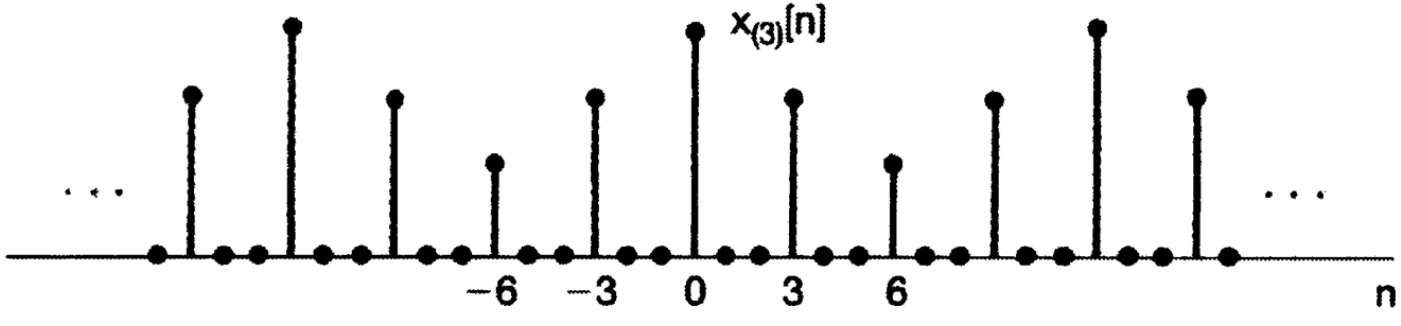
$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] & n = mk \\ 0 & n \neq mk \end{cases} \xleftrightarrow{F} X(e^{jk\omega})$$

Discrete Fourier Transform

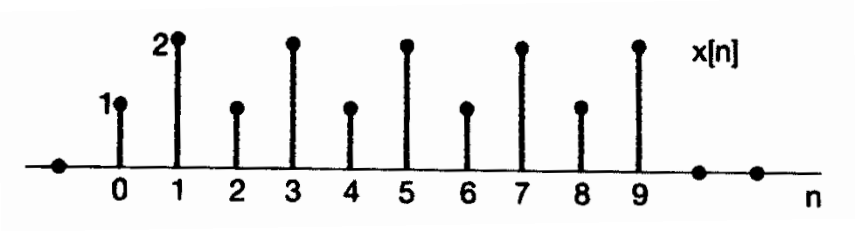
خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۹- انبساط زمانی





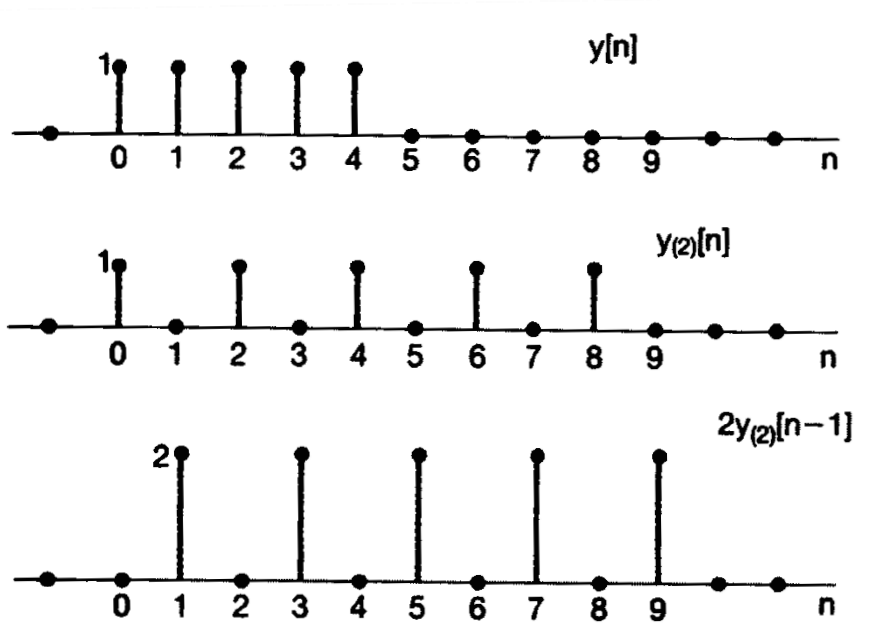
Discrete Fourier Transform



خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۹- انبساط زمانی

$$x[n] = y_{(2)}[n] + 2y_{(2)}[n-1] \qquad y_{(2)}[n] = \begin{cases} y[n/2] & n = 2m \\ 0 & n \neq 2m \end{cases}$$



$$y[n] = g[n-2] \qquad g[n] = rect[\frac{n}{4}]$$

$$G(e^{j\omega}) = \frac{\sin \omega(2 + 1/2)}{\sin(\omega/2)} = \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۹- انبساط زمانی

$$x[n] = y_{(2)}[n] + 2y_{(2)}[n-1]$$

$$y[n] = g[n-2] \qquad G(e^{j\omega}) = \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \qquad Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 2}\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

$$Y_{(2)}(e^{j\omega}) = e^{-j(2\omega)2}\frac{\sin(5(2\omega)/2)}{\sin((2\omega)/2)} = e^{-j4\omega}\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega}\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)} + 2e^{-j\omega}e^{-j4\omega}\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)} = e^{-j4\omega}(1+2e^{-j\omega})\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$

Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۱۰- مشتق گیری فرکانسی

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$nx[n] \xleftrightarrow{F} j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

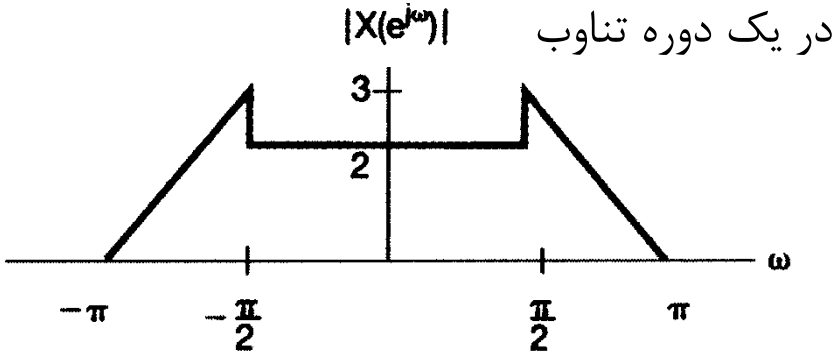
Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۱۱- رابطه پارسوال

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

Discrete Fourier Transform

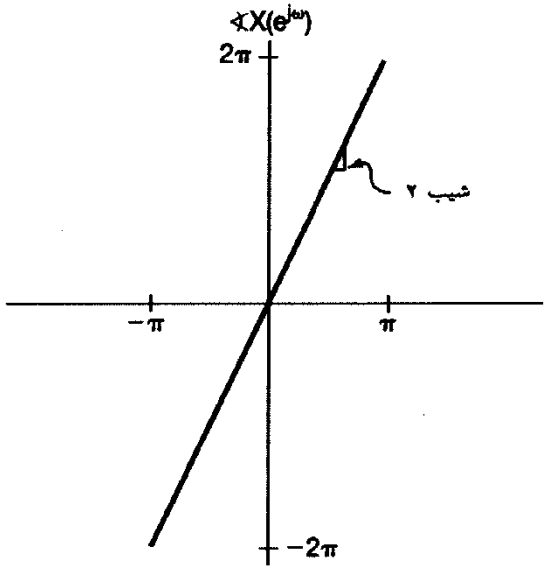


خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

مشخصات سیگنال:

تناوب؟ تبدیل فوریه ضربه ندارد، تابع $x(t)$ متناوب نیست

حقیقی؟ $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$، تابع $x(t)$ حقیقی است



زوج؟ تبدیل فوریه زوج و حقیقی نیست، تابع $x(t)$ زوج نیست

انرژی محدود؟ $\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega < \infty$، تابع $x(t)$ انرژی محدود دارد

Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۱۲- کانولوشن

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$h[n] \xleftrightarrow{F} H(e^{j\omega})$$

$$y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۱۲- کانولوشن

$$h[n] = \delta[n - n_0]$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

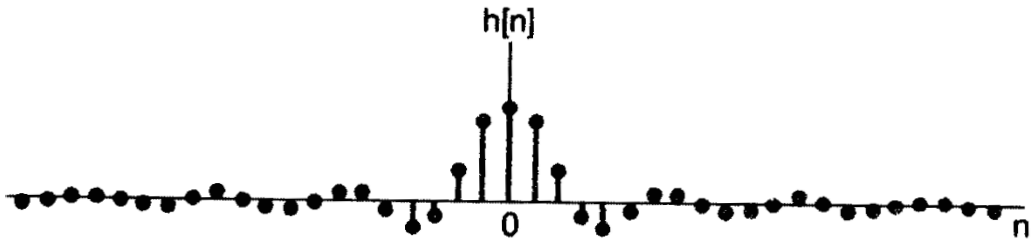
$$y[n] = x[n - n_0]$$

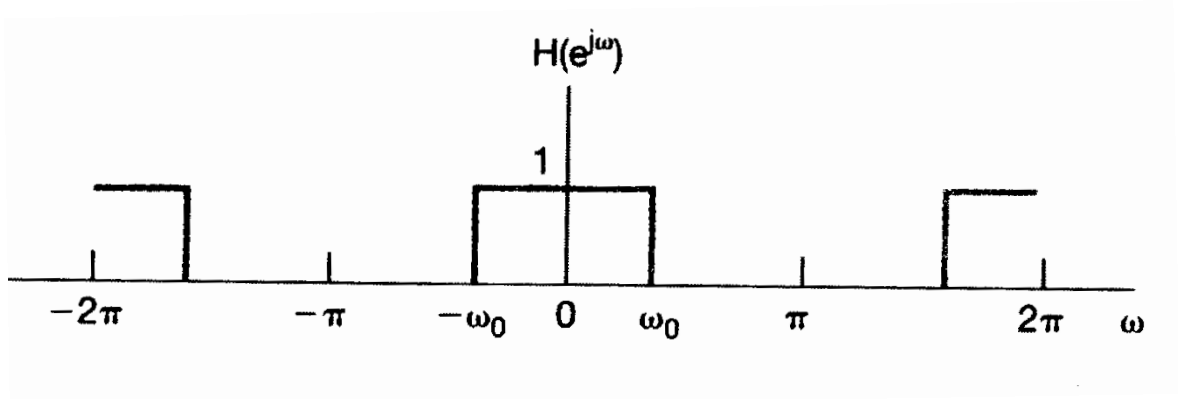
Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۱۲- کانولوشن

$$h[n] = \frac{\sin \omega_0 n}{\pi n} \qquad H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$





فیلتر ایده آل

Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

$$h[n]=a^n u[n] \qquad x[n]=b^n u[n] \qquad |a|,|b|<1$$

۱۲- کانولوشن

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \qquad X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-be^{-j\omega}} \qquad Y(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\frac{1}{1-be^{-j\omega}}$$

$$a\neq b \qquad Y(e^{j\omega})=\frac{1}{a-b}\left[\frac{a}{1-ae^{-j\omega}}-\frac{b}{1-be^{-j\omega}}\right]$$

$$y[n]=\frac{1}{a-b}\left[a.a^n u[n]-b.b^n u[n]\right]=\frac{1}{a-b}\left[a^{n+1}u[n]-b^{n+1}u[n]\right]$$

Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان $a=b$ $x[n]=b^n u[n]$ $h[n]=a^n u[n]$

۱۲- کانولوشن

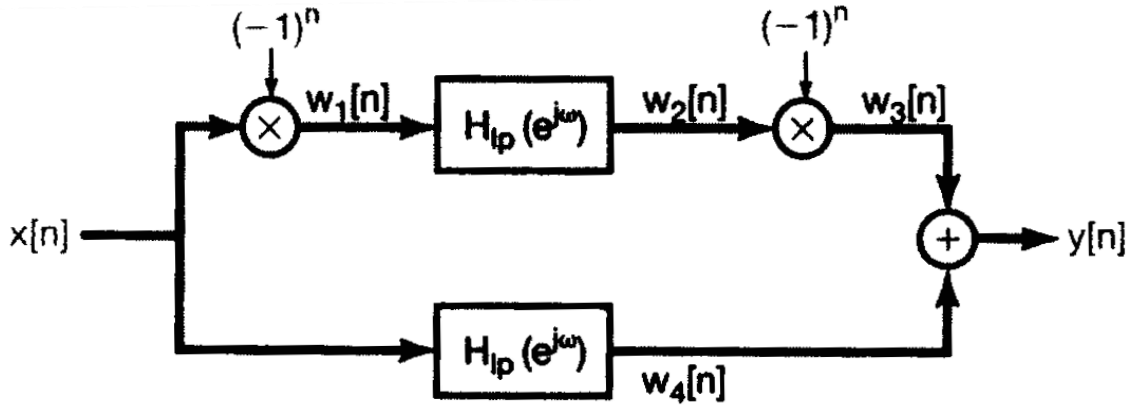
$$Y(e^{j\omega})=\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)^2 \qquad Y(e^{j\omega})=\frac{j}{a}e^{j\omega}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)$$

$$a^n u[n]\xleftrightarrow{F}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right) \qquad na^n u[n]\xleftrightarrow{F} j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)$$

$$(n+1)a^{n+1}u[n+1]\xleftrightarrow{F} je^{j\omega}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)$$

$$(n+1)a^n u[n+1]\xleftrightarrow{F}\frac{j}{a}e^{j\omega}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right) \qquad y[n]=(n+1)a^n u[n+1]$$

Discrete Fourier Transform



خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۱۲- کانولوشن

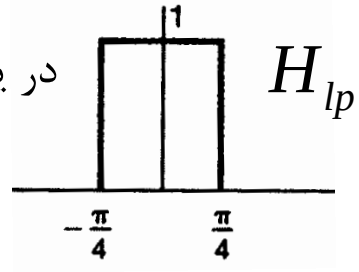
$$w_1[n] = (-1)^n x[n] = e^{j\pi n} x[n]$$

$$W_1(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$$

$$W_2(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega}) X(e^{j(\omega-\pi)})$$

$$Y(e^{j\omega}) = Y_3(e^{j\omega}) + Y_4(e^{j\omega})$$

در یک دوره تناوب



$$H_{lp}(e^{j\omega})$$

$$W_3(e^{j\omega}) = W_2(e^{j(\omega-\pi)}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) X(e^{j(\omega-2\pi)})$$

$$W_4(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$$

Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

$$W_4(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

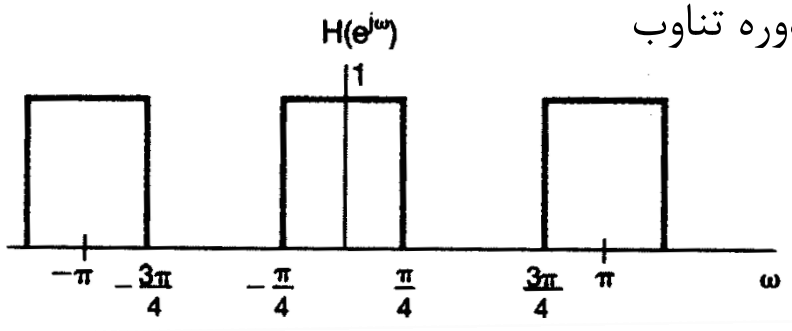
۱۲- کانولوشن متناوب

$$W_3(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j(\omega-2\pi)}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = W_3(e^{j\omega}) + W_4(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j\omega}) + H_{lp}(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})$$

در یک دوره تناوب



فیلتر میان ناگذر

Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۱۳- ضرب

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$y[n] \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega})$$

$$r[n] = x[n]y[n] \xleftrightarrow{F} R(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j(\omega-\theta)}).Y(e^{j\theta})d\theta$$

Discrete Fourier Transform

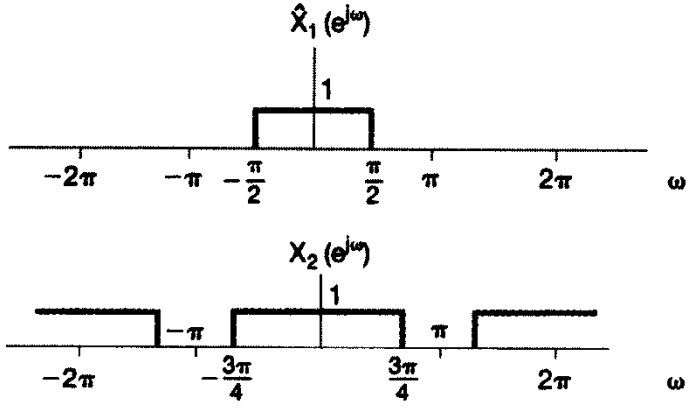
خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

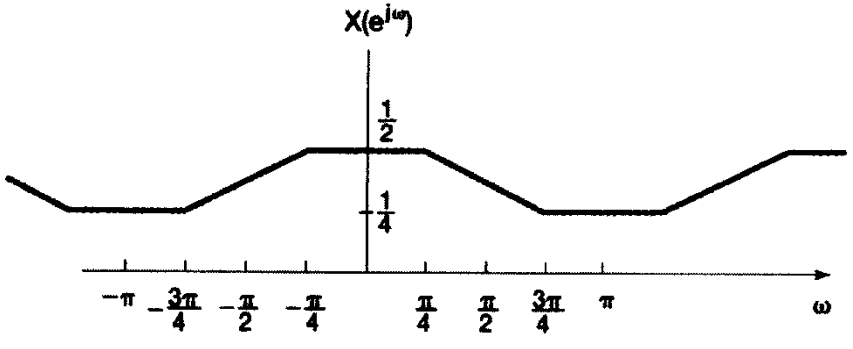
۱۳- ضرب

$$x_1[n] = \frac{\sin(3\pi n/4)}{\pi n} \qquad x_2[n] = \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$$

$$r[n] = x_1[n]x_2[n] \qquad R(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j(\omega-\theta)}).X_2(e^{j\theta})d\theta$$

$$\hat{X}_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} X_1(e^{j\omega}) & -\pi < \omega < \pi \\ 0 & Otherwise \end{cases} \qquad R(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\hat{X}_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})$$





Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

۱۰- همزادی

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

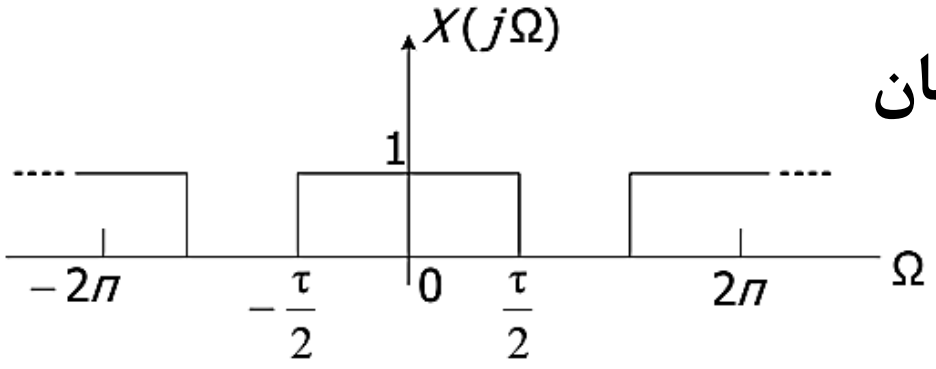
$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

مثال

$$X(j\Omega) = rect(\frac{\Omega}{\tau})$$



x[n]=?

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{jn}e^{j\Omega n}\Big|_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$x[n] = \frac{1}{j2n\pi}(e^{j\frac{\tau}{2}n} - e^{-j\frac{\tau}{2}n}) = \frac{\sin(\frac{\tau}{2}n)}{\pi n}$$

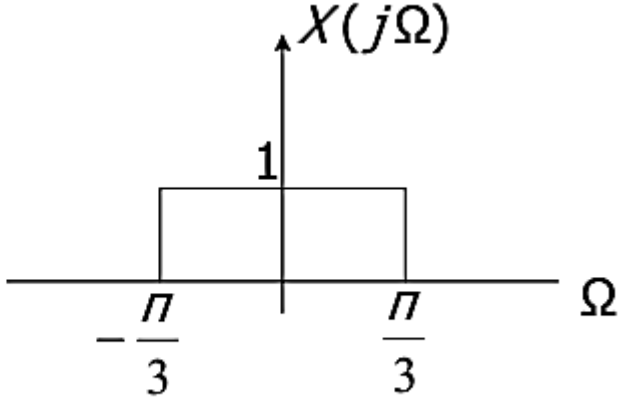
$$\Rightarrow \frac{\sin(\frac{\tau}{2}n)}{\pi n} \rightarrow rect(\frac{\Omega}{\tau})$$

Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

مثال

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{\pi n} \rightarrow rect(\frac{\Omega}{\frac{2\pi}{3}})$$



Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

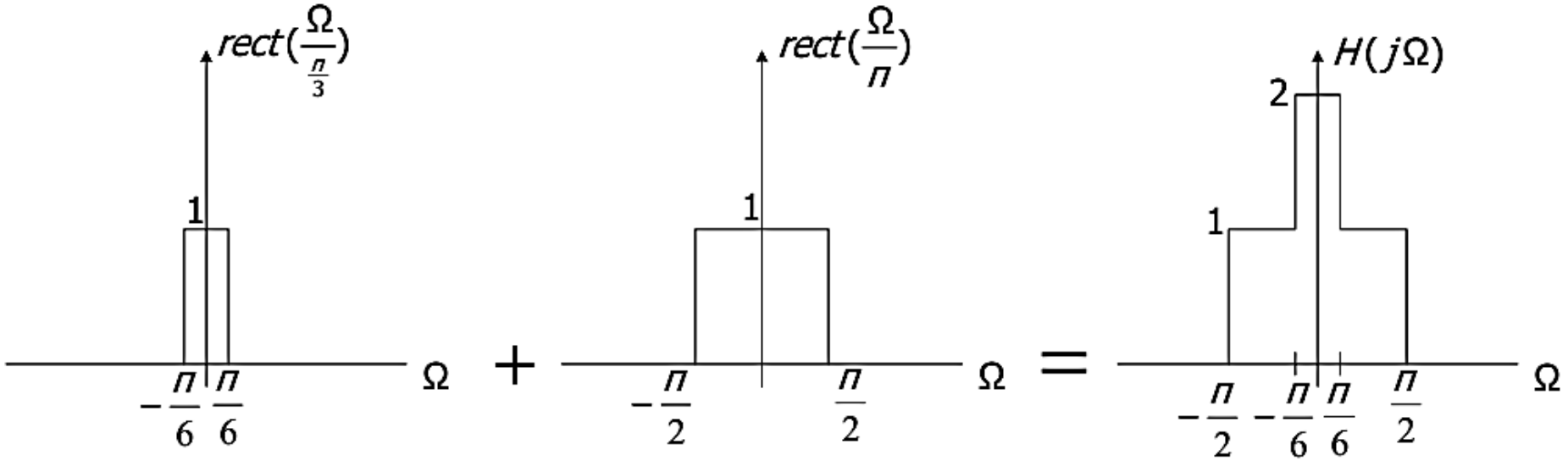
داریم $\dfrac{\sin(\frac{\tau}{2}n)}{n\pi} \leftrightarrow rect(\dfrac{\Omega}{\tau}) \Rightarrow \begin{cases} \tau = \dfrac{\pi}{3}; & \dfrac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{n\pi} \rightarrow rect(\dfrac{\Omega}{\frac{\pi}{3}}) \\ \tau = \pi; & \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \rightarrow rect(\dfrac{\Omega}{\pi}) \end{cases}$

مثال

$$h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{n\pi} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi}$$

$$h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{n\pi} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \Rightarrow H(j\Omega) = rect(\frac{\Omega}{\frac{\pi}{3}}) + rect(\frac{\Omega}{\pi})$$

$H(j\Omega)$



Discrete Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

$$y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow Y(j\Omega) = X(j\Omega)\cdot H(j\Omega)$$

$$x[n] = \frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{8}n} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{8}n} - e^{j\frac{\pi}{4}n} - e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

مثال

$$h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{n\pi} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi}$$

$$x[n] = 2\sin(\frac{\pi}{8}n) - 2\cos(\frac{\pi}{4}n)$$

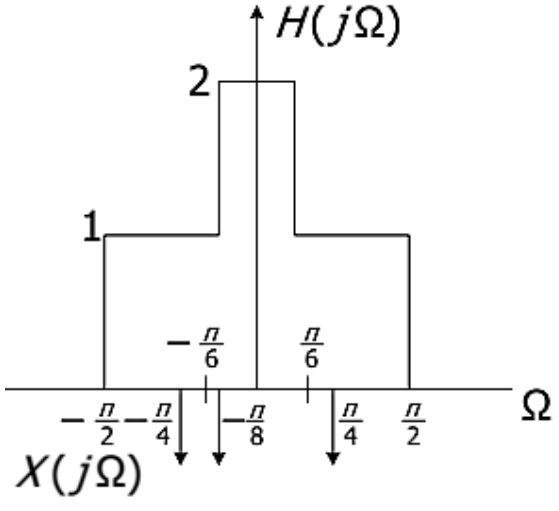
y[n]

$$X(j\Omega) = 2\pi\times(\frac{1}{2j}\delta(\Omega-\frac{\pi}{8}) - \frac{1}{2j}\delta(\Omega+\frac{\pi}{8}) - \delta(\Omega-\frac{\pi}{4}) - \delta(\Omega+\frac{\pi}{4}))$$

$$Y(j\Omega) = 2\pi\times(\frac{1}{2j}H(j(\frac{\pi}{8}))\delta(\Omega-\frac{\pi}{8}) - \frac{1}{2j}H(j(-\frac{\pi}{8}))\delta(\Omega+\frac{\pi}{8}) - H(j(\frac{\pi}{4}))\delta(\Omega-\frac{\pi}{4})$$

$$-H(j(-\frac{\pi}{4}))\delta(\Omega+\frac{\pi}{4})) = 2\pi(2\cdot\frac{1}{2j}\delta(\Omega-\frac{\pi}{8}) - 2\cdot\frac{1}{2j}\delta(\Omega+\frac{\pi}{8}) - \delta(\Omega-\frac{\pi}{4}) - \delta(\Omega+\frac{\pi}{4}))$$

$$y[n] = 2\sin(\frac{\pi}{8}n) - 2\cos(\frac{\pi}{4}n)$$



Discrete Fourier Transform

جدول های ۵-۱ و ۵-۲

خواص تبدیل فوریه گسسته و زوج های اساسی تبدیل فوریه گسسته

Discrete Fourier Transform

سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} \Rightarrow H(j\Omega) = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}}$$

Discrete Fourier Transform

سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی

$$y[n]-ay[n-1]=x[n]$$

$$Y(e^{j\omega})-ae^{-j\omega}Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega}) \qquad H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \qquad h[n]=a^n u[n]$$

Discrete Fourier Transform

سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=2x[n]$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}=\frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}=\frac{4}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})}-\frac{2}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

$$h[n]=4(\frac{1}{2})^n u[n]-2(\frac{1}{4})^n u[n]$$

Discrete Fourier Transform

سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی

$$h[n]=4(\frac{1}{2})^n u[n]-2(\frac{1}{4})^n u[n]$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

$$x[n]=(\frac{1}{4})^n u[n]$$

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega})=\frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}\frac{1}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}=-\frac{4}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}-\frac{2}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2}+\frac{8}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})}$$

$$y[n]=-4(\frac{1}{4})^n u[n]-2(n+1)(\frac{1}{4})^n u[n]+8(\frac{1}{2})^n u[n]$$

Discrete Fourier Transform

سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی

$$y[n]+y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n-1]-\frac{1}{2}x[n-2] \qquad \mathrm{h[n]} \qquad h_I[n]$$

$$Y(j\Omega)+e^{-j\Omega}Y(j\Omega)+\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}Y(j\Omega)=e^{-j\Omega}X(j\Omega)-\frac{1}{2}e^{-j2\Omega}X(j\Omega)$$

$$\Rightarrow (1+e^{-j\Omega}+\frac{1}{4}e^{-j2\Omega})Y(j\Omega)=(e^{-j\Omega}-\frac{1}{2}e^{-j2\Omega})X(j\Omega)$$

$$H(j\Omega)=\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}=\frac{e^{-j\Omega}(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}=\frac{e^{-j\Omega}(1-(\frac{1}{2}e^{-j\Omega}+1-1))}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}$$

Discrete Fourier Transform

سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی

$$H(j\Omega)=\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}=\frac{e^{-j\Omega}(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}=\frac{e^{-j\Omega}(1-(\frac{1}{2}e^{-j\Omega}+1-1))}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}$$

$$=\frac{e^{-j\Omega}-e^{-j\Omega}(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})+e^{-j\Omega}}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}=2e^{-j\Omega}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}-\frac{e^{-j\Omega}}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}$$

$$h[n]=2(-2n\,(-\frac{1}{2})^n u[n])-(-\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]$$

Discrete Fourier Transform

سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی

$$h[n] * h_I[n] = \delta[n] \leftrightarrow H(j\Omega) \cdot H_I(j\Omega) = 1$$

$$H(j\Omega) = \frac{e^{-j\Omega}(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})}{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}$$

$$H_I(j\Omega) = \frac{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}{e^{-j\Omega}(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})} = \frac{e^{j\Omega}(1 + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega} + e^{-j\Omega})}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})} = \frac{e^{j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$h_I[n] = (\frac{1}{2})^{n+1}u[n+1] + \frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1] + (\frac{1}{2})^{n}u[n]$$