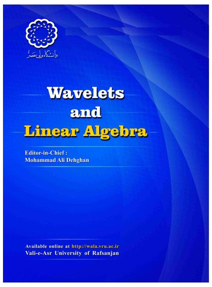
موجک‌ها و جبرخطی ۶(۱) (۱۳۹۸) ۵۵-۷۰



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان

بهبودهایی از نامساوی‌های توابع محدب هندسی برای عملگرها

مجتبی باخرد[*،آ]، رحمت الله لشکری پور[آ]، منیره حاج محمدی[آ]، علیرضا احمدی لداری[آ]

[آ]گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، سیستان و بلوچستان، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۱۶ مهر ۱۳۹۷
پذیرفته شده: ۱۳ بهمن ۱۳۹۷
دسترسی آنلاین: ۱۰ شهریور ۱۳۹۸

ادیتور رابط: حمیدرضا افشین

کلمات کلیدی:

تابع محدب هندسی،
عملگر مثبت، نامساوی
هرمیت-هادامار.

چکیده

در این مقاله، با ارائه تظریفی از تابع محدب هندسی چندین نامساوی شناخته شده از توابع محدب هندسی بهبود داده شده است. در پایان نیز نامساوی‌های بدست آمده برای توابع محدب هندسی عملگری توسیع داده شده است.

[*]نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: mojtaba.bakherad@yahoo.com (مجتبی باخرد)، lashkari@hamoon.usb.ac.ir (رحمت الله

۱. مقدمه

فرض کنید $\mathbb{B}(\mathcal{H})$، C^*-جبر تمام عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با عنصر همانی I باشد. عملگر $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ را مثبت گوییم هرگاه به ازای هر $x \in \mathcal{H}$، $\langle Ax, x\rangle \geq ۰$ و می‌نویسیم $A \geq ۰$. اگر A عملگر معکوس‌پذیر مثبت باشد، آنگاه می‌نویسیم $A > ۰$. عملگر $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ را خودالحاق گوییم هرگاه $A^* = A$. برای عملگرهای خودالحاق $A, B \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$، $A \leq B$ هرگاه $B - A \geq ۰$. برای عملگر خودالحاق $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$، یک نگاشت $*$-یکریختی یکمتری مانند $\psi : C(\mathrm{sp(T)}) \longrightarrow \mathrm{C^*(T)}$ بین مجموعه $C(\mathrm{sp(T)})$، متشکل از همه توابع پیوسته تعریف شده روی مجموعه $\mathrm{sp(T)}$ و C^*-جبر تولید شده به وسیله عملگرهای T و I(یعنی نرم بستار فضای چند جمله‌ای‌ها برحسب T) تعریف می‌شود، به طوری که برای هر $f \in C(\mathrm{sp(T)})$، عملگری مانند $\psi(f)$ وجود دارد که آن را با نماد $f(T)$ نشان داده و به آن حسابان تابعی در T می‌گوییم. اگر $f, g \in C(\mathrm{sp}(T))$، آنگاه $f(t) \geq g(t)\ (t \in \mathrm{sp}(A))$ایجاب می‌کند $f(T) \geq g(T)$.

فرض کنید I یک بازه در $\mathbb{R}$ باشد. تابع $f : I \to \mathbb{R}$ را محدب گوییم هرگاه به ازای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ و $x, y \in I$،

$$f(\alpha x + (۱ - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (۱ - \alpha)f(y). \qquad (۱.۱)$$

اگر $\alpha \notin [۰, ۱]$ و $x, y \in I$ به طوری که $\alpha x + (۱ - \alpha)y \in I$، آنگاه نامساوی اخیر به صورت زیر می‌باشد[۱]:

$$\alpha f(x) + (۱ - \alpha)f(y) \leq f(\alpha x + (۱ - \alpha)y). \qquad (۲.۱)$$

پژوهشگران تاکنون چندین نامساوی برای نامساوی هیلبرت-هادامار ارائه کرده‌اند. به عنوان مثال مصلحیان [۶] شکل ماتریسی آن را مطرح کرد. همچنین در [۸] برای هر تابع محدب f روی بازه I به

لشکری پور)، monire.hajmohamadi@yahoo.com (منیره حاج محمدی)، ahmadi@hamoon.usb.ac.ir (علیرضا احمدی لداری).

http://doi.org/10.22072/wala.2019.95170.1200

طوری که $y, x \in I$ و $x < y$، بهبودی از نامساوی هیلبرت-هادامار به شکل زیر داده شده است:

$$\begin{aligned} f(\frac{x+y}{۲}) &\leq \frac{۱}{۲}\Big(f(\frac{۳x+y}{۴}) + f(\frac{x+۳y}{۴})\Big) \\ &\leq \frac{۱}{y-x}\int_x^y f(t)dt \\ &\leq \frac{۱}{۲}\Big(f(\frac{x+y}{۲}) + \frac{f(x)+f(y)}{۲}\Big) \\ &\leq \frac{f(x)+f(y)}{۲}. \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

یک تابع پیوسته $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ را محدب هندسی گوییم هرگاه برای هر $x, y \in I$ و $\alpha \in [۰, ۱]$، داشته باشیم

$$f(x^\alpha y^{۱-\alpha}) \leq f(x)^\alpha f(y)^{۱-\alpha} \tag{۴.۱}$$

همچنین نامساوی یانگ بیان می‌کند برای هر $x, y \geq ۰$ و $\alpha \in (۰, ۱)$،

$$x^\alpha y^{۱-\alpha} \leq \alpha x + (۱-\alpha)y, \tag{۵.۱}$$

که

$$x^\alpha y^{۱-\alpha} = \inf_{t>۰}\{\alpha t^{\frac{۱}{\alpha}} x + (۱-\alpha)t^{-\frac{۱}{۱-\alpha}} y\}.$$

بهبودها و معکوس‌هایی از این نامساوی در [۲، ۹] ارائه شده است. برخی از ویژگی‌های توابع محدب هندسی را در گزاره زیر بیان می‌کنیم.

گزاره ۱.۱. *(۱) اگر $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ تابع محدب هندسی و نزولی باشد، آنگاه f محدب است.*
(۲) اگر $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ تابع صعودی و محدب باشد، آنگاه f محدب هندسی روی $\mathbb{R}^+$ است.

اثبات. (۱) چون f تابع نزولی است، با استفاده از (۵.۱) برای هر $x, y \in I$ و $\alpha \in [0, 1]$، داریم

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1-\alpha)y) &\leq f(x^{\alpha} y^{1-\alpha}) \\ &\leq f(x)^{\alpha} f(y)^{1-\alpha} \\ &\leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y). \end{aligned}$$

(۲) فرض کنید $x, y \in \mathbb{R}^+$ و $\alpha \in (0, 1)$. چون f تابع محدب و صعودی است، بنابراین

$$f(x^{\alpha} y^{1-\alpha}) \leq f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

قرار دهید $x = t^{\frac{1}{\alpha}} x$ و $y = t^{-\frac{1}{1-\alpha}} y$ برای $0 < t < 1$. بنابراین

$$f(x^{\alpha} y^{1-\alpha}) \leq \alpha t^{\frac{1}{\alpha}} f(x) + (1-\alpha) t^{-\frac{1}{1-\alpha}} f(y).$$

با گرفتن اینفیمم روی t به نتیجه مورد نظر می‌رسیم. □

با توجه به [۱۰] اگر $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ تابع محدب هندسی باشد، آنگاه تابع

$$F = \log \circ f \circ \exp : \log(I) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \tag{۶.۱}$$

محدب است. همچنین اگر $F : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ محدب باشد، آنگاه تابع

$$f = \exp \circ F \circ \log : \exp(I) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \tag{۷.۱}$$

محدب هندسی است.

با استفاده از (۶.۱) تعمیمی از تعریف تابع محدب هندسی به صورت زیر داریم:

لم ۲.۱. *فرض کنید $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ تابع محدب هندسی باشد. در این صورت برای* $x_1, \ldots, x_n \in$

و I و $[0,1]$ $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in$ که $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$، داریم

$$f(y_1^{\alpha_1}\dots y_n^{\alpha_n}) \leq f(y_1)^{\alpha_1}\dots f(y_n)^{\alpha_n}. \tag{۸.۱}$$

اثبات. چون f تابع محدب هندسی است، $F = \log \circ f \circ \exp$ محدب است. بنابراین

$$F(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i F(x_i),$$

به این معنی که $\log(f(\exp \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i)) \leq \sum_{i=1}^n \log(f(\exp x_i))^{\alpha_i}$. بنابراین

$$\log(f(\exp \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i)) \leq \log \prod_{i=1}^n f(\exp x_i)^{\alpha_i}.$$

در نتیجه $f(\exp \alpha_1 x_1 \dots \exp \alpha_n x_n) \leq \prod_{i=1}^n f(\exp x_i)^{\alpha_i}$. حال اگر قرار دهید $\exp x_i = y_i$، آنگاه

$$f(y_1^{\alpha_1}\dots y_n^{\alpha_n}) \leq f(y_1)^{\alpha_1}\dots f(y_n)^{\alpha_n}.$$

□

در [۱۰] نویسندگان نامساوی‌های هرمیت-هادامار را برای توابع محدب هندسی ارائه کرده‌اند. در این مقاله تظریف‌هایی از این نامساوی‌ها ارائه شده است.

۲. کاربردهایی از تظریف‌های نامساوی هیلبرت-هادامار

در ابتدای این بخش تظریفی از نامساوی حسابی-هندسی را نشان می‌دهیم. در [۱۰] نویسندگان نشان دادند که برای تابع محدب هندسی $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ و هر $y, x \in I$، که $0 < x < y$،

نامساوی‌های زیر برقرارند:

$$\begin{aligned}
\log f(\sqrt{xy}) &\leq \frac{۱}{۲}(\log f(\sqrt[۴]{x^۳y}) + \log f(\sqrt[۴]{xy^۳}) \\
&\leq \frac{۱}{\log y - \log x}\int_{\log x}^{\log y} \log f \exp(t)dt \\
&\leq \frac{\log f(\sqrt{xy})}{۲} + \frac{\log f(x) + \log f(y)}{۴} \\
&\leq \frac{\log f(x) + \log f(y)}{۲}.
\end{aligned} \tag{۱.۲}$$

در حالت خاص، اگر قرار دهید $f(x) = \exp(x)$، آنگاه

$$\begin{aligned}
\sqrt{xy} \leq \frac{۱}{۲}(\sqrt[۴]{x^۳y} + \sqrt[۴]{xy^۳}) &\leq \frac{y - x}{\log y - \log x} \\
&\leq \frac{\sqrt{xy}}{۲} + \frac{x + y}{۴} \\
&\leq \frac{x + y}{۲}.
\end{aligned}$$

در ادامه می‌خواهیم نامساوی (۱.۲) را برای $\alpha \in [۰, ۱]$ تعمیم دهیم. برای این منظور به لم زیر نیاز داریم که در [۳، ۴، ۵] ارائه شده است.

لم ۱.۲. *فرض کنید $f : I \to \mathbb{R}$ تابع محدب و $x, y \in I$، که $x < y$ می‌باشد. در این صورت نامساوی‌های زیر را داریم:*

(۱) *به ازای هر* $\alpha \in [۰, ۱]$،

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x + y}{۲}\right) &\leq \alpha f\left(\frac{\alpha y + (۲ - \alpha)x}{۲}\right) + (۱ - \alpha)f\left(\frac{(۱ + \alpha)y + (۱ - \alpha)x}{۲}\right) \\
&\leq \frac{۱}{y - x}\int_x^y f(t)dt \\
&\leq \frac{۱}{۲}[f((۱ - \alpha)x + \alpha b) + \alpha f(x) + (۱ - \alpha)f(y)] \leq \frac{f(x) + f(y)}{۲}.
\end{aligned}$$

(۲)

$$\circ \leq \frac{f(x)+f(y)}{۲} - \frac{۱}{y-x}\int_x^y f(t)dt \leq \frac{۱}{۸}[f'_-(y) - f'_+(x)](y-x).$$

و

$$\circ \leq \frac{۱}{y-x}\int_x^y f(t)dt - \frac{f(x)+f(y)}{۲} \leq \frac{۱}{۸}[f'_-(y) - f'_+(x)](y-x).$$

قضیه ۲.۲. *فرض کنید $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ تابع محدب هندسی و $y, x \in I$ که $x < y$ باشد. در این صورت نامساوی های زیر را داریم:*

(۱) *برای هر* $\lambda \in [\circ, ۱]$،

$$\begin{aligned}\log f(\sqrt{xy}) &\leq \alpha \log f(\sqrt{x^{۲-\alpha}y^{\alpha}}) + (۱-\alpha)\log f(\sqrt{x^{۱-\alpha}y^{۱+\alpha}})\\ &\leq \frac{۱}{\log y - \log x}\int_{\log x}^{\log y} \log f\exp(t)dt\\ &\leq \frac{۱}{۲}(\log f(x^{۱-\alpha}y^{\alpha}) + \alpha\log f(x) + (۱-\alpha)\log f(y))\\ &\leq \frac{\log f(x)+\log f(y)}{۲}. \qquad (۲.۲)\end{aligned}$$

(۲)

$$\begin{aligned}\circ &\leq \frac{\log f(x)+\log f(y)}{۲} - \frac{۱}{\log y - \log x}\int_{\log x}^{\log y}\log f\exp(t)dt\\ &\leq \frac{۱}{۸}[(\log f\exp)'_-(\log y) - (\log f\exp)'_+(\log x)](\log y - \log x)\end{aligned}$$

و

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{\log y - \log x}\int_{\log x}^{\log y} \log f\exp(t)dt - \log f(\sqrt{xy})\\
&\leq \frac{1}{8}[(\log f\exp)'_{-}(\log y) - (\log f\exp)'_{+}(\log x)](\log y - \log x).
\end{aligned}
$$

اثبات. با استفاده از لم ۱.۲ و نامساوی (۱.۲)، نتایج برقرار است. □

نکته ۳.۲. چون $\exp(t)$ تابع صعودی است، با استفاده از (۲.۲)، داریم

$$
\begin{aligned}
f(\sqrt{xy}) &\leq f(\sqrt{x^{\frac{2-\alpha}{2}}y^{\frac{\alpha}{2}}})^{\alpha} + f(\sqrt{x^{\frac{1-\alpha}{2}}y^{\frac{1+\alpha}{2}}})^{1-\alpha}\\
&\leq \exp(\frac{1}{\log y - \log x}\int_{\log x}^{\log y} \log f\exp(t)dt)\\
&\leq \sqrt{f(x^{1-\alpha}y^{\alpha})} + \sqrt{f(x)^{\alpha}} + \sqrt{f(y)^{(1-\alpha)}}\\
&\leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.
\end{aligned}
$$

۳. تظریف‌هایی از نامساوی‌های توابع محدب هندسی

در ادامه تظریف‌هایی شامل توابع محدب هندسی را ارائه می‌کنیم. برای این منظور لم زیر از اهمیت خاصی برخوردار است، که تظریفی از نامساوی (۴.۱) ارائه می‌کند.

لم ۱.۳. *فرض کنید* $f: I \subseteq \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ *تابع محدب هندسی،* $x, y \in I$ *و* $\alpha \in [0,1]$ *باشد. در این صورت*

$$
f(x^{\alpha}y^{1-\alpha}) \leq L_f(x,y)^{r(\alpha)} f(x)^{\alpha} f(y)^{1-\alpha} \leq f(x)^{\alpha} f(y)^{1-\alpha}, \tag{۱.۳}
$$

که $L_f(x,y) = \frac{f^2(\sqrt{xy})}{f(x)f(y)}$ *و* $r(\alpha) = \min\{\alpha, 1-\alpha\}$. *بعلاوه، اگر* $\alpha \notin [0,1]$ *و* $x^{\alpha}y^{1-\alpha} \in I$*، آنگاه نامساوی (۱.۳) عکس می‌شود.*

اثبات. برای اثبات نامساوی سمت چپ در رابطه (۱.۳) دو حالت $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ و $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ را در نظر می‌گیریم. اگر $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$، آنگاه

$$\begin{aligned} f(x^{\alpha}y^{1-\alpha}) &= f\left((\sqrt{xy})^{2\alpha}y^{1-2\alpha}\right) \\ &\le f(\sqrt{xy})^{2\alpha}f(y)^{(1-2\alpha)} \quad (\text{(بنابه نامساوی (۴.۱}) \\ &= L_f(x,y)^{\alpha}f(x)^{\alpha}f(y)^{1-\alpha}. \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

حال اگر $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$، آنگاه $1-\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$. بنابراین

$$\begin{aligned} f(x^{\alpha}y^{(1-\alpha)}) &= f\left(x^{2\alpha-1}(\sqrt{xy})^{2(1-\alpha)}\right) \\ &\le f(x)^{2\alpha-1}f^{2(1-\alpha)}(\sqrt{xy}) \quad (\text{(بنابه (۴.۱}) \\ &= L_f(x,y)^{1-\alpha}f(x)^{\alpha}f(y)^{1-\alpha}. \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

در نتیجه با استفاده از (۲.۳) و (۳.۳)، داریم

$$f(x^{\alpha}y^{(1-\alpha)}) \le L_f(x,y)^{\min\{\alpha,1-\alpha\}}f(x)^{\alpha}f(y)^{1-\alpha}.$$

برای نامساوی سمت راست در (۱.۳)، چون $L_f(x,y) \le 1$، بنابراین $L_f(x,y)^{r(\alpha)} \le 1$. □

اکنون، با استفاده از لم ۱.۳ بهبود هایی برای برخی از نامساوی‌ها ارائه می‌کنیم که اخیرا معرفی شده‌اند.

قضیه ۲.۳. *فرض کنید $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ تابع محدب هندسی باشد و $x, y \in I$ به طوری که $x < y$.*

در این صورت

$$\begin{aligned} f(\sqrt{xy}) &\leq \int_0^1 L_f(x,y)^{2r(\alpha)+\frac{1}{2}} \sqrt{f(x^\alpha y^{1-\alpha}) f(x^{1-\alpha} y^\alpha)} d\alpha \\ &\leq \int_0^1 L_f(x,y)^{2r(\alpha)+\frac{1}{2}} \sqrt{f(x)f(y)} d\alpha \\ &\leq \sqrt{f(x)f(y)}. \end{aligned}$$

اثبات. چون f محدب هندسی است، بنابراین برای هر $x, y \in I$ با استفاده از لم ۱.۳ نامساوی‌های زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} f(\sqrt{xy}) &= f(\sqrt{x^\alpha y^{1-\alpha} x^{1-\alpha} y^\alpha}) \\ &\leq \sqrt{L_f(x,y)} \sqrt{f(a^\alpha y^{1-\alpha}) f(x^{1-\alpha} y^\alpha)} \\ &\quad (\text{بنابه لم ۱.۳}) \\ &\leq \sqrt{L_f(x,y) L_f(x,y)^{r(\alpha)} L_f(x,y)^{r(1-\alpha)}} \sqrt{f(a)^\alpha f(y)^{1-\alpha} f(x)^{1-\alpha} f(y)^\alpha} \\ &\quad (\text{بنابه لم ۱.۳}) \\ &= L_f(x,y)^{2r(\alpha)+\frac{1}{2}} \sqrt{f(a)^\alpha f(y)^{1-\alpha} f(x)^{1-\alpha} f(y)^\alpha} \\ &= L_f(x,y)^{2r(\alpha)+\frac{1}{2}} \sqrt{f(x)f(y)} \\ &\leq \sqrt{f(x)f(y)}. \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری از نامساوی بالا، داریم

$$\begin{aligned} f(\sqrt{xy}) &\leq \int_0^1 L_f(x,y)^{2r(\alpha)+\frac{1}{2}} \sqrt{f(a^\alpha y^{1-\alpha}) f(x^{1-\alpha} y^\alpha)} d\alpha \\ &\leq \int_0^1 L_f(x,y)^{2r(\alpha)+\frac{1}{2}} \sqrt{f(x)f(y)} d\alpha \\ &\leq \sqrt{f(x)f(y)} \end{aligned}$$

□

نکته ۳.۳. فرض کنید f تابع محدب روی $[x,y]$ باشد. در این صورت $f\circ\log$ تابع محدب هندسی روی $[\exp(x),\exp(y)]$ می‌باشد.

با استفاده از نکته ۳.۳ و قضیه ۲.۳ نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۴.۳. *فرض کنید $f: I\subseteq\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ تابع محدب باشد. در این صورت برای هر $x,y\in I$، داریم*

$$\begin{aligned} f(\frac{x+y}{۲}) &\leq \int_{۰}^{۱} L_{f\circ\log}(\exp(x),\exp(y))^{۲r(\alpha)+\frac{۱}{۲}}\sqrt{f(\alpha x+(۱-\alpha)y)f((۱-\alpha)x+\alpha y)}d\alpha \\ &\leq \int_{۰}^{۱} L_{f\circ\log}(\exp(x),\exp(y))^{۲r(\alpha)+\frac{۱}{۲}}\sqrt{f(x)f(y)}d\alpha \\ &\leq \sqrt{f(x)f(y)}\leq\frac{f(x)+f(y)}{۲}. \end{aligned}$$

۴. بهبودهایی ازنامساوی‌های توابع محدب هندسی عملگری

در سال‌های اخیر نامساوی‌های عملگری مورد توجه پژوهشگران زیادی بوده است. برای اطلاع بیشتر از این موضوع می‌توان به [۷] و مراجع آن اشاره کرد. در این قسمت $\mathcal{A}$ به عنوان یک C^*-جبر جابجایی، زیر جبری از $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ در نظر گرفته شده است. مجموعه تمام عملگرهای معکوس‌پذیر مثبت در $\mathcal{A}$ را با $\mathcal{A}^+$ نمایش می‌دهیم. برخی از نامساوی‌ها، که اخیرا در [۱۰] ارائه شده‌اند شامل نامساوی هیلبرت-هادامار، برای تابع محدب هندسی عملگری تظریف شده‌اند. تعریف تابع محدب هندسی عملگری برای عملگرهای $B,A\in\mathcal{A}^+$ به‌طوریکه $sp(A),sp(B)\subseteq I$ و هر تابع پیوسته $f: I\subseteq\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ در [۱۰] به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(A^{\alpha}B^{۱-\alpha})\leq f(A)^{\alpha}f(B)^{۱-\alpha}.$$

تقوی و همکارانش در [۱۰] نوع عملگری نامساوی هیلبرت-هادامار را برای توابع محدب هندسی نشان

داده‌اند. فرض کنید $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ تابع محدب هندسی عملگری روی بازه I باشد. در این صورت برای عملگرهای $B, A \in \mathcal{A}^+$ ، که $sp(A), sp(B) \subseteq I$، نامساوی زیر برقرار است:

$$\log f(\sqrt{AB}) \leq \int_{\circ}^{\backslash} \log f(A^{\alpha} B^{\backslash-\alpha}) d\alpha \leq \log \sqrt{f(A)f(B)}. \qquad (۱.۴)$$

لم ۱.۴. *فرض کنید $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ تابع محدب هندسی عملگری باشد. در این صورت برای عملگرهای $A, B \in \mathcal{A}^+$، که $sp(A), sp(B) \subseteq I$ و $\alpha \in [\circ, \backslash]$، داریم*

$$f(A^{\alpha} B^{\backslash-\alpha}) \leq L_f(A, B)^{r(\alpha)} f(A)^{\alpha} f(B)^{\backslash-\alpha} \leq f(A)^{\alpha} f(B)^{\backslash-\alpha}, \qquad (۲.۴)$$

که در آن $L_f(A, B)^{r(\alpha)} = \left(\frac{f^{۲}(\sqrt{AB})}{f(A)f(B)}\right)^{r(\alpha)}$ و $r(\alpha) = \min\{\alpha, \backslash - \alpha\}$.

اثبات. روش اثبات مشابه برهان لم ۱.۳ می‌باشد. □

قضیه ۲.۴. *فرض کنید $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ تابع محدب هندسی عملگری باشد. آنگاه برای* $\alpha \in [\circ, \backslash]$ *و* $A, B \in \mathcal{A}^+$،

$$\begin{aligned}
\log f(\sqrt{AB}) &\leq \int_{\circ}^{\backslash} \log(L_f(A^{\alpha} B^{\backslash-\alpha}, A^{\backslash-\alpha} B^{\alpha})) d\alpha + \int_{\circ}^{\backslash} \log f(A^{\alpha} B^{\backslash-\alpha}) d\alpha \\
&\leq \int_{\circ}^{\backslash} \log f(A^{\alpha} B^{\backslash-\alpha}) d\alpha \\
&\leq \log \sqrt{f(A)f(B)} + \log(L_f(A, B)^{\backslash/۲}) \\
&\leq \log \sqrt{f(A)f(B)},
\end{aligned}$$

که $L_f(A, B) = \left(\frac{f^{۲}(\sqrt{AB})}{f(A)f(B)}\right)$ *و* $sp(A), sp(B) \subseteq I$.

اثبات. چون f تابع محدب هندسی عملگری است، بنابه لم ۱.۳ رابطه زیر برقرار است:

$$f(\sqrt{AB}) \leq L_f(A, B)^{r(\alpha)} \sqrt{f(A)f(B)}.$$

حال اگر A و B را به‌ترتیب با $A^{\alpha}B^{1-\alpha}$ و $A^{1-\alpha}B^{\alpha}$ جایگزین کنیم، داریم

$$f(\sqrt{AB}) \leq L_f(A^{\alpha}B^{1-\alpha}, A^{1-\alpha}B^{\alpha})^{r(\alpha)}\sqrt{f(A^{\alpha}B^{1-\alpha})f(A^{1-\alpha}B^{\alpha})}. \tag{۳.۴}$$

چون log تابع یکنواست، بنابراین

$$\begin{aligned}
&\log f(\sqrt{AB})\\
&\leq \log(L_f(A^{\alpha}B^{1-\alpha}, A^{1-\alpha}B^{\alpha})^{r(\alpha)}\sqrt{f(A^{\alpha}B^{1-\alpha})f(A^{1-\alpha}B^{\alpha})})\\
&\leq \log(L_f(A^{\alpha}B^{1-\alpha}, A^{1-\alpha}B^{\alpha})^{r(\alpha)}) + \log(\sqrt{f(A^{\alpha}B^{1-\alpha})f(A^{1-\alpha}B^{\alpha})})\\
&= r(\alpha)\log(L_f(A^{\alpha}B^{1-\alpha}, A^{1-\alpha}B^{\alpha})) + \frac{1}{2}(\log f(A^{\alpha}B^{1-\alpha}) + \log f(A^{1-\alpha}B^{\alpha})).
\end{aligned}$$

اگر از این نامساوی روی بازه $[0,1]$ انتگرال بگیرید، آنگاه

$$\begin{aligned}
\log f(\sqrt{AB}) &\leq \int_0^1 r(\alpha)\log(L_f(A^{\alpha}B^{1-\alpha}, A^{1-\alpha}B^{\alpha}))d\alpha + \int_0^1 \log f(A^{\alpha}B^{1-\alpha})d\alpha\\
&\leq \int_0^1 \log f(A^{\alpha}B^{1-\alpha})d\alpha,
\end{aligned} \tag{۴.۴}$$

چون $\int_0^1 \log f(A^{1-\alpha}B^{\alpha})d\alpha = \int_0^1 \log f(A^{\alpha}B^{1-\alpha})d\alpha$.

از طرف دیگر، چون $f(A^{\alpha}B^{1-\alpha}) \leq f(A)^{\alpha}f(B)^{1-\alpha}.L_f(A,B)^{r(\alpha)} \leq f(A)^{\alpha}f(B)^{1-\alpha}$، بنابراین

$$\begin{aligned}
\log(f(A^{\alpha}B^{1-\alpha})) &\leq \log(f(A)^{\alpha}f(B)^{1-\alpha}.L_f(A,B)^{r(\alpha)})\\
&= \log f(A)^{\alpha} + \log f(B)^{1-\alpha} + \log(L_f(A,B)^{r(\alpha)}.
\end{aligned} \tag{۵.۴}$$

با انتگرال‌گیری از (۵.۴) روی $[۰,۱]$، داریم

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{۱} \log(f(A^{\alpha}B^{۱-\alpha}))d_{\alpha} &\leq \int_{۰}^{۱} (\log f(A)^{\alpha} + \log f(B)^{۱-\alpha} + \log(L_f(A,B)^{r(\alpha)})d_{\alpha}\\ &= \frac{۱}{۲}(\log f(A) + \log f(B)) + \frac{۱}{۲}\log L_f(A,B)\\ &= \log\sqrt{f(A)f(B)} + \log(L_f^{۱/۲}(A,B))\\ &\leq \log\sqrt{f(A)f(B)}. \end{aligned} \tag{۶.۴}$$

بنابه روابط (۴.۴) و (۶.۴)، داریم

$$\begin{aligned}\log f(\sqrt{AB}) &\leq \int_{۰}^{۱} \log(L_f(A^{\alpha}B^{۱-\alpha}, A^{۱-\alpha}B^{\alpha}))d\alpha + \int_{۰}^{۱} \log f(A^{\alpha}B^{۱-\alpha})d\alpha\\ &\leq \int_{۰}^{۱} \log f(A^{\alpha}B^{۱-\alpha})d\alpha\\ &\leq \log\sqrt{f(A)f(B)} + \log(L_f^{۱/۲}(A,B))\\ &\leq \log\sqrt{f(A)f(B)}. \end{aligned}$$

□

نکته ۳.۴. در اینجا $L_f^{۱/۲}(A,B)$ در بازه $[۰,۱]$ است. چون مقدار تابع لگاریتم به ازای مقادیر بین $[۰,۱]$منفی است، بنابراین نامساوی فوق بهبودی از نامساوی (۱.۴) می‌باشد.

نتیجه ۴.۴. فرض کنید $0 \leq \alpha \leq 1$ و $A, B \in \mathcal{A}^{+}$. در این صورت

$$\begin{aligned}\sqrt{AB} &\leq \int_0^1 \log(L_{\exp}(A^{\alpha}B^{1-\alpha}, A^{1-\alpha}B^{\alpha}))d\alpha + \int_0^1 A^{\alpha}B^{1-\alpha}d\alpha \\ &\leq \int_0^1 A^{\alpha}B^{1-\alpha}d\alpha \\ &\leq \frac{A+B}{2} + \log(L_{\exp}^{1/2}(A,B)) \\ &\leq \frac{A+B}{2},\end{aligned}$$

که $L_{\exp}(A,B) = \frac{\exp^{2}(\sqrt{AB})}{\exp(A)\exp(B)}$.

اثبات. با قراردادن $f(t) = \exp(t)$ در قضیه ۲.۴ به نتیجه مطلوب می‌رسیم. □

مراجع

[1] M. Bakherad, M. Kian, M. Krnic and S.A. Ahmadi, Interpolating operator Jensen-type inequalities for log-convex and superquadratic functions, *Filomat*, **32**(13) (2018), 4523–4535.

[2] M. Bakherad, M. Krnic and M.S. Moslehian, Reverses of the Young inequality for matrices and operators, *Rocky Mt. J. Math.*, **46**(4) (2016), 1089–1105.

[3] S.S. Dragomir, An inequality improving the first Hermite-Hadamard in- equality for convex functions defined on linear spaces and applications for semi-inner products, *JIPAM, J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **3**(2) (2002), 1–8.

[4] S.S. Dragomir, An inequality improving the second Hermite-Hadamard in- equality for convex functions defined on linear spaces and applications for semi-inner products, *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **3**(3) (2002), 1–18.

[5] S.S. Dragomir, Inequalities of Hermite-Hadamard type for composite convex functions, *Frontiers in Functional Equations and Analytic Inequalities*, (2019), 559–584.

[6] M.S. Moslehian, Matrix Hermite-Hadamard type inequalities, *Houston J. Math.*, **39**(1) (2013), 177–189.

[7] M.S. Moslehian, F. Mirzapour and A. Morassaei, Operator entropy inequalities, *Colloq. Math.*, **130**(2) (2013), 159–168.

[8] C.P. Niculescu and L.E. Persson, *Convex Functions and their Applications*, A Contemporary Approach, Springer, New York (2004).

[9] M. Sababheh and M.S. Moslehian, Advanced refinements of Young and Heinz inequalities, *J. Number Theory*, **172** (2017), 178–199.

[10] A. Taghavi, V. Darvish, H.M. Nazari and S.S. Dragomir, Hermite-Hadamard type inequalities for operator geometrically convex functions, *Monatsh. Math.*, **181** (2016), 187–203.